Analiza wektorowa. Teoria pola.

Pole skalarne

$$\varphi = \varphi(x, y, z)$$

Pole wektorowe

$$\vec{A} = A_x(x, y, z)\vec{i_x} + A_y(x, y, z)\vec{i_y} + A_z(x, y, z)\vec{i_z}$$

Gradient

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i_x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{i_y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{i_z}$$

Jeśli przemieścimy się o odcinek $d\vec{l} = \vec{i_x}dx + \vec{i_y}dy + \vec{i_z}dz$ nastąpi przyrost funkcji φ o:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

Przykład: siła i energia potencjalna

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U$$

gdzie U jest potencjałem (miarą energii potencjalnej).

Operator *nabla* (operator Hamiltona)

Wprowadźmy wektorowy operator różniczkowy: *nabla*

$$\nabla = \vec{i_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{i_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{i_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

Gradient pola skalarnego możemy zapisać jako działanie operatora nabla na funkcję:

$$\operatorname{grad}\varphi(x,y,z) \equiv \nabla\varphi(x,y,z)$$

Przyrost pola przy przesunięciu o $d\vec{l}$:

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\vec{l}$$

Strumień wektora

Rozważmy pole wektorowe opisujące prędkość przepływu nieściśliwej cieczy. W czasie Δt przez element powierzchni ΔS przepływa objętość cieczy równa:

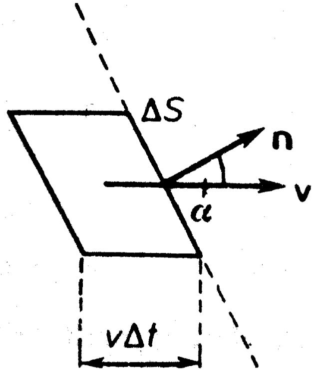
$$\Delta V = \Delta S \cos\alpha \cdot v\Delta t$$

Strumień opisuje objętość cieczy przepływającej w jednostce czasu przez element powierzchni:

$$\Delta\Phi = \Delta V/\Delta t = \Delta S v \cos\alpha$$

Przechodząc do różniczek:

$$d\Phi = v \cos\alpha \cdot dS$$



Strumień pola

Wprowadzając wektor normalny do powierzchni $\vec{n}$ możemy zapisać element powierzchni jako wektor:

$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$$

Wtedy element strumienia zapiszemy jako iloczyn skalarny:

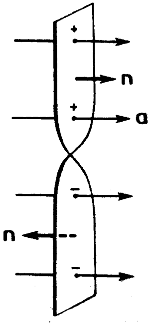
$$d\Phi = \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Całkowity strumień przez powierzchnię S otrzymamy sumując elementy $\Delta\Phi$:

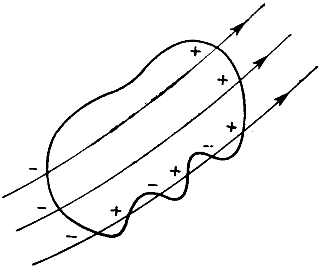
$$\Phi_v = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Strumień pola

Znak strumienia zależy od wyboru zwrotu wektora normalnego. W przypadku powierzchni zamkniętych przyjmuje się obliczanie strumienia wypływającego z objętości ograniczonej powierzchnią (wektor $\vec{n}$ skierowany za zewnątrz powierzchni).



Interpretacja geometryczna strumienia: jeśli przedstawimy pole przez układ linii, których gęstość odpowiada wartości bezwzględnej wektora w danym punkcie pola, strumień pola można interpretować jako różnicę linii pola wychodzących i wchodzących przez powierzchnię.



Dywergencja

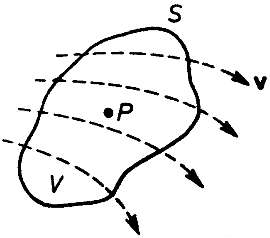
Jeśli strumień pola przez zamkniętą powierzchnię nie jest zerowy, oznacza to, że wewnątrz otoczonej powierzchni znajdują się „źródła” lub „dreny”. Średnią moc źródeł zawartych w objętości opisuje stosunek Φ/V.

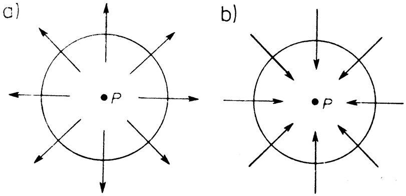
W granicy otrzymujemy dywergencję:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \lim_{V\to 0}\frac{\Phi_v}{V}$$

Dla dowolnego wektora $\vec{a}$:

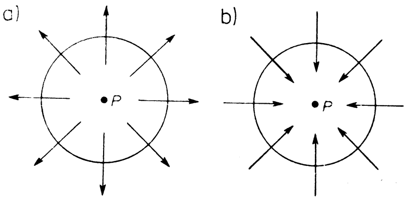
$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint \vec{a}\cdot d\vec{S}$$





Dywergencja, źródłowość, rozbieżność

źródło - punkt w którym linie pola mają początek (dywergencja dodatnia)
dren (zlew, ściek) - linie mają swój koniec (dywergencja ujemna)



W układzie kartezjańskim:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} \vec{a} \equiv \nabla \cdot \vec{a}$$

Twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa

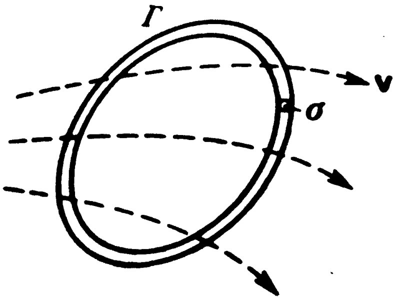
$$\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{a} \cdot dV$$

Strumień pola a przez zamkniętą powierzchnię S równy jest sumie źródeł pola, zawartych w objętości V ograniczonej powierzchnią.

$$\Phi_a = \int_V \nabla \vec{a} \cdot dV$$

Cyrkulacja (krążenie)

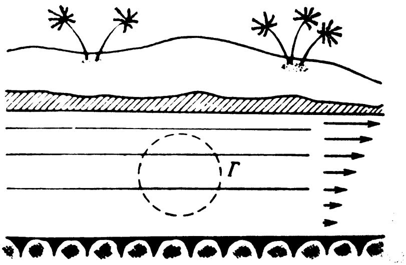
Rozważmy cienki kanalik wzdłuż konturu Γ. Rozważmy przepływ wyłącznie w tym kanaliku. Cyrkulacja jest miarą tego przepływu (iloczyn prędkości cieczy i długości konturu).



Dla pola wektorowego $\vec{a}$ cyrkulacja wzdłuż konturu Γ wynosi:

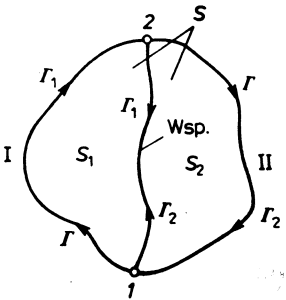
$$C = \oint_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

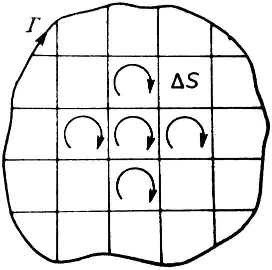
Cyrkulacja. Przykłady.



Linie pola nie muszą być zamknięte, by cyrkulacja była niezerowa. Przykład: laminarny przepływ cieczy.

Cyrkulacja jest wielkością addytywną.



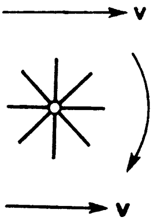


Rotacja (wirowość)

Rotacja - stosunek cyrkulacji C do powierzchni S „obmywanej” przez cyrkulację.

$$|\operatorname{rot}\vec{a}| = \lim_{S\to 0}\frac{C_a}{S} = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_{\Gamma}\vec{a}\cdot d\vec{l}$$

Rotacja jest wektorem. Kierunek rotacji jest taki, dla jakiego jej wartość jest maksymalna.



Interpretacja: w miejscach, gdzie rotacja jest niezerowa, wiatraczek obraca się.

Rotacja

W układzie kartezjańskim:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i_x} & \vec{i_y} & \vec{i_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

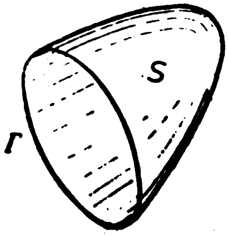
$$= \vec{i_x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \vec{i_y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \vec{i_z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

Wykorzystując operator nabla:

$$\operatorname{rot}\vec{a} \equiv \nabla \times \vec{a}$$

Twierdzenie Stokesa

Dla dowolnej powierzchni S rozpostartej na dowolnym konturze Γ



$$\oint_\Gamma \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\, \vec{a} \cdot d\vec{S}$$

Przykład: siła zachowawcza.
Praca siły zachowawczej F po zamkniętym konturze Γ:

$$W = \oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \iff \nabla \times \vec{F} = 0$$

Pole zachowawcze jest polem bezwirowym.

Laplasjan (Operator Laplace'a)

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$ - dywergencja gradientu φ

Przykład: równanie falowe

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Tożsamości

Pole wirowe jest polem bezźródłowym:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

Pole potencjalne jest polem bezwirowym:

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0$$

Rotacja rotacji:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$